ANNEE 2001

CONCOURS D'ADMISSION

A

L'ECOLE DE L'AIR

CONCOURS PC/PSI

COMPOSITION
DE
MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
Coefficient : 13

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin et de la rigueur apportés dans le travail.

T.S.V.P.

Le problème est constitué de trois parties indépendantes.

Partie 1

On considère les équations différentielles :

$$(H) : (1 - x^2)y''(x) - 3xy'(x) = 0$$
$$(E) : (1 - x^2)y''(x) - 3xy'(x) = 2$$

1. Déterminer les solutions réelles $x \to y(x)$ de (H) définies sur $]-1,1[$ et telles que si a_0, a_1 sont deux réels donnés on ait : $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$ et les expliciter à l'aide des fonctions usuelles.

2. A l'aide de la méthode dite de variation des constantes, déterminer les solutions réelles $x \to y(x)$ de (E) définies sur $]-1,1[$ et telles que si b_0, b_1 sont deux réels donnés on ait : $y(0) = b_0$, $y'(0) = b_1$ et les expliciter à l'aide de fonctions usuelles.

3. Sans utiliser le résultat obtenu à la question précédente déterminer les solutions de (E) qui sont développables en série entière sur $]-1,1[$ et telles que si b_0, b_1 sont deux réels donnés on ait : $y(0) = b_0$, $y'(0) = b_1$.

4. Déduire des calculs précédents la valeur de la série : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!}$.

Partie 2

On note E le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
Dans tout le problème (C) désigne l'ensemble des points de E dont les coordonnées (x,y) dans R vérifient :

$$y^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

1. Étude de (*C*).

(a) Montrer que (*C*) a un unique point A d'ordonnée nulle et calculer l'abscisse *a* de A.

(b) Montrer que (*C*) possède un axe de symétrie.

(c) Montrer qu'en tout point de (*C*) autre que A, il existe une tangente à (*C*), puis préciser les points de (*C*) à tangente horizontale.

(d) Préciser l'éventuelle tangente à (*C*) en A.

(e) Tracer (*C*) dans le repère *R* (unité 2cm sur chaque axe).

2. Étude d'une intégrale.

(a) Déterminer l'ensemble I des réels x tels que la fonction $t \to \dfrac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+3t+2}}$ soit continue et intégrable sur l'intervalle $]x,+\infty[$. (On prouvera que $a \in I$)

On pose alors $f(x) = \displaystyle\int_{]x,+\infty[} \frac{dt}{\sqrt{t^3+3t^2+3t+2}}$ et on note par la suite $b = f(a)$, $J = f(I)$.

(b) Montrer que $J =]0,b]$ et préciser en quels points de I la fonction f est dérivable.

(c) Établir qu'il existe des réels α, β que l'on précisera tels que l'on ait pour tout $h \geq 0$ la relation :

$$f(a+h) = b + \sqrt{h}(\alpha + \beta h + o(h)).$$

(d) Déterminer deux réels u, v tels que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} ux^v$.

3. (a) Justifier l'existence de $F = f^{-1}$, fonction réciproque de f définie sur $]0,b]$ et montrer que F est dérivable sur $]0,b]$.

(b) Déterminer l'ensemble Γ des points du plan définis par l'équation paramétrique :

$$\Gamma = \left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E, \exists w \in]0,b], x = F(w), y = F'(w) \right\}.$$

(c) Montrer que F est indéfiniment dérivable au point b : on pourra à cet effet calculer $F''(w)$ pour $w \in]0,b[$.

(d) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $F(b+k)$, pour k tendant vers 0 par valeurs négatives.

Partie 3

E désigne l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées 2 x 2 à coefficients réels. $SO_2(\mathbb{R})$ désigne le sous-ensemble de E formé des matrices orthogonales de E dont le déterminant est égal à 1. Pour toute matrice de E on pose $f(M) = \mathrm{tr}({}^tMM)$ (trace de la matrice ${}^tMM$).

1. Montrer que l'application $M \to \|M\| = \sqrt{f(M)}$ est définie sur E, et qu'elle correspond à une norme sur E. Préciser $\|M\|$ lorsque $M \in SO_2(\mathbb{R})$.

2. Soit G l'ensemble des matrices de E de déterminant égal à 1, et C_α le sous-ensemble des matrices M de G dont la norme est un réel positif donné α : $\|M\| = \alpha$.

(a) Soit $M \in C_\alpha$. Déterminer en fonction de α seulement le polynôme caractéristique P de la matrice ${}^tMM$.

(b) La matrice ${}^tMM$ est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$? Que peut-on en déduire sur le discriminant de P ?

(c) Montrer que lorsque M décrit G, $\|M\|$ admet un élément minimum α_0 que l'on déterminera.

(d) Démontrer que l'ensemble C_{α_0} est égal à $SO_2(\mathbb{R})$.